模块三 数列拔高题型

第 1 节 奇偶数列问题—求和篇（★★★☆）

内容提要

有的数列求和时需分 n 为奇数和偶数讨论，常见的有以下两类：

1．通项为奇偶分段的结构：例如，$a_n=\begin{cases}f(n),n\text{为奇数}\\g(n),n\text{为偶数}\end{cases}$，这种情况奇数项和偶数项各自构成不同类型的数列，求和时常按奇数项、偶数项分组求和.

2．通项含 $(-1)^n$ 这种结构：由于通项中含 $(-1)^n$，所以求和时会出现正负交替的现象，求和时常把相邻两项组合.

3．递推式含 $(-1)^n$ 这类结构：可分奇偶讨论将递推式化简，再进行分析.

典型例题

类型Ⅰ：通项为奇偶分段的数列求和

【例 1】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）令 $b_n=\begin{cases}a_n,n\text{为奇数}\\2^{a_n},n\text{为偶数}\end{cases}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

解：（1）（所给等式左侧其实是数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和，这就是已知前 n 项和求通项的问题）

因为 $\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$ ①，所以 $\dfrac{a_1}{2}=2-\dfrac{1+2}{2}=\dfrac{1}{2}$，故 $a_1=1$；

当 $n\ge 2$ 时，$\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=2-\dfrac{n+1}{2^{n-1}}$ ②，

由①－②可得：$\dfrac{a_n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}-(2-\dfrac{n+1}{2^{n-1}})=\dfrac{n+1}{2^{n-1}}-\dfrac{n+2}{2^n}=\dfrac{2(n+1)}{2^n}-\dfrac{n+2}{2^n}=\dfrac{n}{2^n}$，所以 $a_n=n$；

又 $a_1=1$ 也满足上式，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=n$.

（2）由（1）知 $a_n=n$，所以 $b_n=\begin{cases}n,n\text{为奇数}\\2^n,n\text{为偶数}\end{cases}$，

（数列 $\{b_n\}$ 的通项公式按奇偶分段，故求和时可按奇偶项分组求和，先考虑 n 为偶数的情形）

当 n 为偶数时，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=(b_1+b_3+\cdots+b_{n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_n)$

$$=[1+3+\cdots+(n-1)]+(2^2+2^4+\cdots+2^n)=\frac{\frac{n}{2}(1+n-1)}{2}+\frac{2^2[1-(2^2)^{\frac{n}{2}}]}{1-2^2}=\frac{n^2}{4}+\frac{4(2^n-1)}{3};$$

（对于 n 为奇数的情形，可按上述方法重求，更简单的做法是补一项凑成偶数项，再减掉补的）

当 n 为奇数时，$S_n=S_{n+1}-b_{n+1}=\dfrac{(n+1)^2}{4}+\dfrac{4(2^{n+1}-1)}{3}-2^{n+1}=\dfrac{(n+1)^2}{4}+\dfrac{1}{3}\cdot 2^{n+1}-\dfrac{4}{3}$；

综上所述，$S_n=\begin{cases}\dfrac{n^2}{4}+\dfrac{4(2^n-1)}{3},n\text{为偶数}\\ \dfrac{(n+1)^2}{4}+\dfrac{1}{3}\cdot 2^{n+1}-\dfrac{4}{3},n\text{为奇数}\end{cases}$.

【反思】若通项按奇偶分段，只需按奇数项、偶数项分组求前 n 项和即可.

类型Ⅱ：通项或递推式含 $(-1)^n$ 的数列求和

【例 2】设 $a_n=(-1)^n\cdot(4n-3)$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=$______.

解析： $\{a_n\}$ 的通项公式中有 $(-1)^n$ 这一结构，不便于直接求和，我们先列出若干项观察规律，

数列 $\{a_n\}$ 中的项依次为 -1，5，-9，13，-17，21，…

我们发现，若按 a_1+a_2，a_3+a_4，a_5+a_6，… 来组合，则每组的和均为 4，能否恰好分完，由 n 的奇偶决定，故需讨论，先考虑 n 为偶数这种简单的情形，

当 n 为偶数时，$S_n=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{n-1}+a_n)=\dfrac{n}{2}\times 4=2n$；

对于 n 为奇数的情形，可以按上面的方法重新计算，分完组最后会余下一项，单独加上去即可. 但更简单的做法是补一项凑成偶数项，再把补的这项减掉，

当 n 为奇数时，$n+1$ 为偶数，且 $S_n=S_{n+1}-a_{n+1}$，

其中 S_{n+1} 由于下标为偶数，可代上面 n 为偶数时的结果来算，a_{n+1} 则代通项公式计算，

所以 $S_n=S_{n+1}-a_{n+1}=2(n+1)-(-1)^{n+1}\cdot[4(n+1)-3]=2n+2-(4n+1)=1-2n$；

综上所述，$S_n=\begin{cases}2n,n\text{为偶数}\\ 1-2n,n\text{为奇数}\end{cases}$.

答案： $\begin{cases}2n,n\text{为偶数}\\ 1-2n,n\text{为奇数}\end{cases}$

【反思】当通项中有 $(-1)^n$ 时，常按相邻项分组求和；求和时先求 n 为偶数的情形，此时恰好分整数组，再求 n 为奇数的情形，可通过添项凑成偶数项，即 $S_n=S_{n+1}-a_{n+1}$，这样可以简化计算.

【例 3】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_2=4$，$a_{n+2}-a_n=(-1)^n+3(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列 $\{a_n\}$ 的前 20 项和.

解：（递推公式中有 $(-1)^n$ 这一结构，故考虑分奇偶讨论）

当 n 为奇数时，$a_{n+2}-a_n=(-1)^n+3$ 即为 $a_{n+2}-a_n=2$，

（若不懂上式的含义，可代一些值去看，将 $n=1$，3，5 分别代入可得 $a_3-a_1=2$，$a_5-a_3=2$，$a_7-a_5=2$，我们发现 $\{a_n\}$ 的奇数项构成公差 $d=2$ 的等差数列）

所以 $a_1+a_3+\cdots+a_{19}=10a_1+\dfrac{10\times(10-1)}{2}d=20+45\times 2=110$；

当 n 为偶数时，$a_{n+2}-a_n=(-1)^n+3$ 即为 $a_{n+2}-a_n=4$，所以 $\{a_n\}$ 的偶数项构成公差 $d'=4$ 的等差数列，

故 $a_2+a_4+\cdots+a_{20}=10a_2+\dfrac{10\times(10-1)}{2}d'=40+45\times4=220$；

所以 $a_1+a_2+\cdots+a_{20}=(a_1+a_3+\cdots+a_{19})+(a_2+a_4+\cdots+a_{20})=110+220=330$.

【反思】当递推公式中含有 $(-1)^n$ 这种结构时，往往需要通过分奇偶讨论，化简递推式，再进行分析.

【例 4】（2022・天津卷）设 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列，且 $a_1=b_1=a_2-b_2=a_3-b_3=1$.

（1）求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证：$(S_{n+1}+a_{n+1})b_n=S_{n+1}b_{n+1}-S_nb_n$；

（3）求 $\sum\limits_{k=1}^{2n}[a_{k+1}-(-1)^ka_k]b_k$.

解：（1）（a_1 和 b_1 已知，只需求公差和公比，即可求得通项，可由 $\begin{cases}a_2-b_2=1\\a_3-b_3=1\end{cases}$ 建立方程组求解）

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，$\{b_n\}$ 的公比为 q，因为 $a_1=b_1=a_2-b_2=a_3-b_3=1$，所以 $\begin{cases}1+d-q=1\\1+2d-q^2=1\end{cases}$，

结合 $q\neq0$ 解得：$q=2$，$d=2$，所以 $a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$，$b_n=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$.

（2）由（1）可得 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$，（$S_n,b_n,a_n$ 已知了，将求证的作差，代入验算）

所以 $(S_{n+1}+a_{n+1})b_n-(S_{n+1}b_{n+1}-S_nb_n)=[(n+1)^2+2n+1]2^{n-1}-[(n+1)^2 2^n-n^2\cdot2^{n-1}]$

$=2^{n-1}[(n+1)^2+2n+1-2(n+1)^2+n^2]=2^{n-1}(n^2+2n+1+2n+1-2n^2-4n-2+n^2)=0$，

故 $(S_{n+1}+a_{n+1})b_n=S_{n+1}b_{n+1}-S_nb_n$.

（3）（直接观察不易发现求和的思路，故先写几项出来看看）

$\sum\limits_{k=1}^{2n}[a_{k+1}-(-1)^ka_k]b_k=(a_2+a_1)b_1+(a_3-a_2)b_2+(a_4+a_3)b_3+\cdots+(a_{2n}+a_{2n-1})b_{2n-1}+(a_{2n+1}-a_{2n})b_{2n}$ ①，

（注意到 $[a_{k+1}-(-1)^ka_k]b_k$ 含有 $(-1)^k$ 结构，考虑相邻两项组合再求和，先求组合后的通项）

记 $c_n=(a_{2n}+a_{2n-1})b_{2n-1}+(a_{2n+1}-a_{2n})b_{2n}$，则 $c_n=[4n-1+2(2n-1)-1]\cdot2^{(2n-1)-1}+[2(2n+1)-1-(4n-1)]2^{2n-1}$

$=(8n-4)2^{2n-2}+2\times2^{2n-1}=2^{2n-2}(8n-4+4)=2^{2n-2}\cdot8n=4^{n-1}\cdot8n=2n\cdot4^n$，

且式①即为 $\sum\limits_{k=1}^{2n}[a_{k+1}-(-1)^ka_k]b_k=c_1+c_2+\cdots+c_n$，

（观察发现 c_n 由等差数列 $\{2n\}$ 和等比数列 $\{4^n\}$ 相乘构成，故用错位相减法求其前 n 项和）

设 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，则 $\begin{cases}T_n=2\times4^1+4\times4^2+6\times4^3+\cdots+(2n-2)\cdot4^{n-1}+2n\cdot4^n & ②\\4T_n=\qquad 2\times4^2+4\times4^3+6\times4^4+\cdots+(2n-2)\cdot4^n+2n\cdot4^{n+1} & ③\end{cases}$，

②－③可得：$-3T_n=2\times4^1+2\times4^2+2\times4^3+\cdots+2\times4^n-2n\cdot4^{n+1}=2\times\dfrac{4(1-4^n)}{1-4}-2n\cdot4^{n+1}$

$=\dfrac{8}{3}\times4^n-\dfrac{8}{3}-2n\cdot4^{n+1}=\dfrac{2}{3}\times4^{n+1}-\dfrac{8}{3}-2n\cdot4^{n+1}=(\dfrac{2}{3}-2n)\cdot4^{n+1}-\dfrac{8}{3}$，

所以$T_n=(\frac{2n}{3}-\frac{2}{9})\cdot 4^{n+1}+\frac{8}{9}$，即$\sum\limits_{k=1}^{2n}[a_{k+1}-(-1)^k a_k]b_k=(\frac{2n}{3}-\frac{2}{9})\cdot 4^{n+1}+\frac{8}{9}$.

【总结】若通项中含有$(-1)^n$这类结构，且不易整体求和，则可以考虑按相邻两项组合，进行分组求和.

强化训练

1.（2022·华侨、港澳台联考·★★★）设$\{a_n\}$是首项为1，公差不为0的等差数列，且a_1，a_2，a_6成等比数列.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）令$b_n=(-1)^n a_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n.

2.（2023·新高考Ⅱ卷·★★★★）已知$\{a_n\}$为等差数列，$b_n=\begin{cases}a_n-6,n\text{为奇数}\\2a_n,n\text{为偶数}\end{cases}$，记$S_n$，$T_n$分别为$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前$n$项和，$S_4=32$，$T_3=16$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）证明：当$n>5$时，$T_n>S_n$.

3.（2020·新课标Ⅰ卷（改）·★★★★）数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}+(-1)^n a_n=3n-1$，前12项和为243，求a_1.

4.（2023·T8联考·★★★★）已知数列$\{\ln a_n\}$是等差数列，记S_n为$\{a_n\}$的前n项和，$\{S_n+a_1\}$是等比数列，$a_1=1$.

（1）求a_n；

（2）$b_n=\log_2 a_{2n-1}+\log_2 a_{2n}$，求数列$\{(-1)^n\cdot b_n^2\}$的前10项和.